



التعداد تذكير

I. تذكير :

A. مجموعة منتهية - رئيسي مجموعة :

01. تعريف :

E مجموعة و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
إذا كان عدد عناصر المجموعة E هو n عنصر نقول أن المجموعة E هي مجموعة منتهية .
العدد n يسمى رئيسي المجموعة E . و نرمز له ب : $\text{card}E = n$.

02. أمثلة :

$E = \{a, b, c, f\}$ مجموعة منتهية و $\text{card}E = 4$. أما المجموعات N أو \mathbb{R} أو $[0,1]$.. فهي غير منتهية.

03. مجموعات متقدراتان: Ensembles équipotents:

I- تعريف:

A و B مجموعتان منتهيتان. إذا وجد تطبيق تقابلي بين A و B نقول إن المجموعتان A و B متقدراتان . لدينا : $\text{card}A = \text{card}B$

04. خاصيات العمليات و رئيسي :

A و B مجموعتان منفصلتان $(A \cap B = \emptyset)$. لدينا : $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B$.

بصفة عامة: $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}A \cap B$.

E_1 و E_2 و \dots و E_p مجموعات منتهية و غير فارغة لدينا: $\text{card}E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \dots \times \text{card}E_p$.

حالة خاصة: $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$ (إذن) : $\text{card}E^p = (\text{card}E)^p$.

رئيسي متمم جزء A في E : لدينا : $C_E^A = \bar{A} = E \setminus A$ مع : $\text{card}\bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$.

B. المبدأ الأساسي للتعداد :

01. مبدأ الجداء :

نعتبر تجربة تشمل p اختيارا. مع $(p \in \{1, 2, 3, \dots\})$

▪ إذا كان الاختيار الأول يتم ب : n_1 كيفية مختلفة.

▪ إذا كان الاختيار الثاني يتم ب : n_2 كيفية مختلفة.

▪ إذا كان الاختيار الثالث يتم ب : n_3 كيفية مختلفة

.....

▪ إذا كان الاختيار الذي رقمه p يتم ب : n_p كيفية مختلفة.

فإن عدد الكيفيات التي يتم بها ال p اختيارات هو $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

C. عدد التطبيقات من مجموعة E نحو مجموعة F (E و F منتهيتان وغير فارغتين)

01. خاصية :

A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتين عدد التطبيقات من A نحو B هو : $(\text{card}B)^{\text{card}A}$

D. الترتيبات بدون تكرار:**01.** تعريف:

لتكن $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ مجموعة تحتوي على n عنصر مع $n \in \mathbb{N}^*$ ليكن p عددا صحيحا طبيعيا حيث $1 \leq p \leq n$ كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n بدون تكرار أي عنصر يسمى **ترتيبة بدون تكرار** ل p عنصر من بين n عنصر . أو أيضا كل عنصر (x_1, x_2, \dots, x_p) من E^p (مع العناصر x_i مختلفة مثنى مثنى) تسمى **ترتيبة بدون تكرار** ل p عنصر من بين n

02. عدد الترتيبات :**1-** خاصية:

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n عنصر (مع $1 \leq p \leq n$) هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له بالرمز A_n^p حيث :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

E. التبديلات (حالة خاصة بالنسبة لترتيبات بدون تكرار: ترتيب n عنصر بدون تكرار من بين n عنصر)

01. تعريف:

إذا رتبنا n عنصر من بين n عنصر (أي $p = n$) هذه الترتيبة تسمى **تبديلة** ل n عنصر .

02. خاصية:

عدد تبديلات ل n عنصر هو العدد $n!$ مع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$

F. التأليفات :**01.** تعريف:

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر مع $(n \in \{1, 2, 3, \dots\})$ كل جزء من E يحتوي على p عنصر ($p \leq n$) يسمى **تأليفة** ل p عنصر من بين n عنصر.

02. عدد التأليفات :**1-** خاصية:

عدد التأليفات ل p ($p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) عنصر من بين n عنصر هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له ب :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$$

G. حدانية نيوتن :**2-** خاصية:

ليكن a و b من \mathbb{R} لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i$

H. شجرة الإمكانيات :**1. مثال 1 :**

لقطعة نقود وجهين : فظهر القطعة نرمل له ب: **P (PILE)**
وجه القطعة الآخر نرمل له ب: **F (face)**

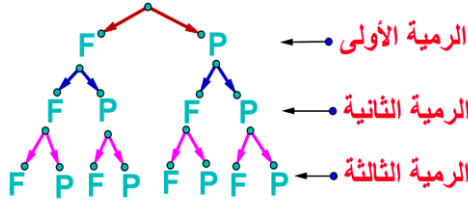
نرمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية (عندما نكتب أن النتيجة كانت: **PPF**
نقصد أن القذفة الأولى أعطت **F** والقذفة 2 أعطت **P** والقذفة 3 أعطت **P**).

ملحوظة: هذه التجربة يمكن تمثيلها في التمثيل التالي يسمى شجرة الإمكانيات.

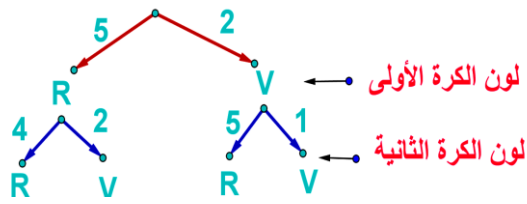
2. مثال 2 :

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 2 من اللون الأخضر .
نسحب عشوائيا وبتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق
(أي بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق).
ملحوظة : يمكن استعمال شجرة الإمكانيات .

شجرة الإمكانيات لقفزة نقدية 3 مرات متتالية



شجرة الإمكانيات

**حساب الاحتمالات****II. تجربة عشوائية - مفردات:****01. نشاط :**

- نسقط من علو 3 أمتار قطعة من حديد . نتوقع بأن القطعة ستقع على الأرض. هذه التجربة إذا تكررت ستعطي نفس النتيجة
- نقذف في الهواء قطعة نقدية مرتين ونهتم بالنتيجة المحصل عليها للوجه الأعلى في كل مرة.
- هل يمكن أن نعرف النتيجة المحصل عليها مسبقا في كل محاولة؟

02. مصطلحات: تجربة عشوائية - إمكانية - حدث

التجربة الثانية : تسمى تجربة عشوائية أو اختبار عشوائي

النتائج المحصل عليها هي : **FF** و **FP** و **PF** و **PP** .

إمكانية: كل نتيجة محصل عليها تسمى إمكانية نرمل لها ب ω_1 أي $\omega_1 = PP$ و $\omega_2 = PF$...

كون: الإمكانيات تكون مجموعة تسمى كون الإمكانيات ونرمل لها ب : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. عدد عناصر Ω يسمى رئيسي Ω

و يرمز له ب: $card\Omega = 4$

حدث : كل جزء A من المجموعة Ω يسمى حدث

مثال الحدث: $A = \{PP, PF, FP\}$ أو $A = \{PP\}$ أو $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ أو $A = \emptyset$

حدث أولي : كل جزء متكون من إمكانية 1 فقط يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي. مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$

تعبير عن حدث: الأحداث يمكن التعبير عنها بجمل. مثال: $A = \{PF, FP\}$ "نتيجتا القذفة الأول و الثانية مختلفتان"

تحقيق الحدث A - أحداث خاصة:

إذا قمنا بالتجربة السابقة وحصلنا على **FP** نقول بان الحدث $A = \{PF, FP\}$ قد تحقق أو الحدث A قد وقع .

 Ω كون الإمكانيات

حدث أولي: كل جزء يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$..

الحدث الأكيد: $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ يسمى الحدث الأكيد لأن أي نتيجة لتجربة تنتمي لهذا الجزء (أي الجزء Ω يتحقق دائما).

الحدث المستحيل: $A = \emptyset$ يسمى الحدث المستحيل لأن أي نتيجة تقع بعد التجربة و لا تنتمي لهذا الجزء.

▪ انسجام حدثين: حدثين A و B غير منسجمين يعني أن: $A \cap B = \emptyset$.

مثال: $A = \{PF, FP\}$ و $B = \{FF, PP\}$ لأن $A \cap B = \emptyset$

▪ الحدث المضاد:

Ω كون الإمكانيات. نقول إن الحدثين A و B متضادان يكافئ أن: $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = \Omega$ ، نكتب: $\bar{A} = B$ أو $\bar{B} = A$ خاصية: $cardA + card\bar{A} = card\Omega$.

03. أمثلة :

1. بالنسبة لتجربة: $A = \{PF, FP, PP\}$ و $B = \{FF\}$ حدثان متضادان لأن: $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = \Omega$ إذن: $\bar{A} = B$

2. يحتوي صندوق: على 3 كرات من اللون أبيض و كرتين من اللون أسود و كرة من اللون أحمر. نسحب من الصندوق تانيا كرتين (دفعة واحدة).

1) ما هو عدد الإمكانيات؟ (أو ما هو عدد السحبات): (أو أوجد $card\Omega$)

2) لنعتبر الحدث: B " سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء " ما هو عدد الإمكانيات التي تحقق B ? أو ما هو $cardB$ ؟

3) عبر عن الحدث المضاد \bar{A} بجملة. ما هو عدد الإمكانات التي تحقق الحدث \bar{A} ? (أي $card\bar{A}$).

04. مجموعة تجزئ:

مجموعة E تسمى مجموعة تجزئ ل Ω يعني:

E متكونة من أجزاء الكون Ω و هذه الأجزاء منفصلة مثنى مثنى و اتحاد هذه الأجزاء هو الكون Ω .

▪ مثال: $E = \{\{PP\}; \{PF, FP\}; \{FF\}\}$ هي تجزئ ل Ω

III. الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

A احتمال تحقق إمكانية (أو حدث أولي):

01. نشاط 1 :

نرمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين عندما نكتب أن النتيجة (أو الإمكانية) كانت: PF نقصد أن الفذفة الأولى أعطت P والفذفة 2 أعطت F . بعد إعادة التجربة 1000 مرة حصلنا على النتائج التالية.

FF	FP	PF	PP	الإمكانية
240	260	270	230	عدد المرات التي تحققت الإمكانية

1. ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق؟

نقول إن احتمال الحصول على الإمكانية PF هي $\frac{270}{1000}$ و نكتب $p(\{PF\}) = 0,27$

2. ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ لكي يتحقق؟

نقول إن احتمال الحصول على الإمكانية PP هو $\frac{230}{1000}$ و نكتب $p(\{PP\}) = 0,23$

02. نشاط 2 :

نرمي في الهواء نردا مكعبا له 6 أوجه تحمل على التوالي الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6.

1) ما هو كون الإمكانيات؟

2) نعتبر الأحداث التالية:

A " نحصل على رقم a حيث $|a| < 2$ "

B " نحصل على رقم a حيث a يقبل القسمة على 3 "

C " نحصل على رقم a يكون زوجي "

- أ- أكتب بالتفصيل الأحداث التالية : A ؛ B ؛ C .
 ب- ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق. ماهي نسبة حظه؟
 ت- ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ أن يتحقق. أوجد نسبة حظ الحصول على الحدث A .
 ث- أوجد نسبة احتمال الحصول على حدث أولي.

03. احتمال على مجموعة:

1. تعريف:

لتكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مجموعة منتهية كون الإمكانيات

- إذا كانت صورة كل عنصر ω_i من Ω بعدد p_i ينتمي إلى $[0,1]$ أي $(\omega_i \mapsto p_i)$ ؛ وكان $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$
- نقول بأننا عرفنا احتمالا p على الكون Ω .
- نقول إن احتمال الحدث الابتدائي $\{\omega_i\}$ هو العدد p_i ونكتب : $p(\{\omega_i\}) = p_i$.
- الزوج $(\Omega ; p)$ يسمى فضاء احتماليا منتهيا .

2. تعريف: بطريقة أخرى

لتكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مجموعة منتهية كون إمكانيات تجربة عشوائية .

- عندما نعيد تجربة N مرة حيث n_i مرة تتحقق فيه الامكانية ω_i . العدد $\frac{n_i}{N}$ يسمى احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ (أو الامكانية ω_i) ونكتب
- $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$
- احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A ونكتب : $p(A)$.

B. احتمال حدث :

01. نشاط:

نأخذ النشاط السابق المتعلق برمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين

3. نعتبر الحدث $A = \{PP; FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{270}{1000} + \frac{230}{1000} = \frac{500}{1000}$ ونكتب

$$p(A) = p(\{PP, PF\}) = p(\{PP\}) + p(\{PF\}) = 0,5$$

1. احتمال حدث :

2. تعريف :

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A ونكتب : $p(A)$.

أو أيضا $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{ip}\}$ فإن :

$$p(A) = p(\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{ip}\}) = p(\{\omega_{i1}\}) + p(\{\omega_{i2}\}) + p(\{\omega_{i3}\}) + \dots + p(\{\omega_{ip}\})$$

3. مثال: $A = \{1, 2, 4\}$ لدينا:

$$p(A) = p(\{1, 2, 4\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{4\})$$

4. خاصيات :

02. خاصيات :

- ليكن A و B حدثين من كون الإمكانيات من Ω .
- $p(\emptyset) = 0$ و $p(\Omega) = 1$ و $\forall A \in \Omega: 0 \leq p(A) \leq 1$.
- $A \cap B = \emptyset$ (حدثان غير منسجمين) لدينا : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- حالة عامة : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

03. برهان :

- لدينا : $B \cup \emptyset = B$ ومنه : $p(B \cup \emptyset) = p(B)$ أي $p(B) + p(\emptyset) = p(B)$ ومنه : $p(\emptyset) = 0$ وبالتالي : $p(\emptyset) = 0$.
- خلاصة : $p(\emptyset) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$ صحيحة طبقا للتعريف .
- نعتبر : $A \cap B = \emptyset$ مع $A = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ و $B = \{y_1, y_2, \dots, y_h\}$ ومنه : $A \cup B = A = \{x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_h\}$.
- إذن : $p(A \cup B) = p(\{x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_h\})$

$$= \underbrace{p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + \dots + p(\{x_d\})}_{p(A)} + \underbrace{p(\{y_1\}) + p(\{y_2\}) + \dots + p(\{y_h\})}_{p(B)}$$
- خلاصة : $A \cap B = \emptyset$ إذن $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- نبين أن : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- نعلم أن : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$ ومنه : $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega) \Rightarrow p(A) + p(\bar{A}) = 1$

$$\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
- خلاصة : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

4. نعتبر الحدث $A = \{PP; FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{270}{1000} + \frac{230}{1000} = \frac{500}{1000}$ و نكتب $p(\{PP, PF\}) = 0,5$

IV. فرضية تساوي الاحتمالات:

01. خاصية:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية (اي الأولية) متساوية الاحتمال في تجربة حيث كون امكانيتها Ω .
 (أي $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \dots = p(\{\omega_n\})$) يصبح احتمال الحدث A من Ω هو $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

02. تمرين:

امتحان شفوي في الرياضيات يحتوي على: 5 أسئلة في الهندسة و 4 أسئلة في الجبر و 3 أسئلة في التحليل. الطالب يختار 3 أسئلة من بين هذه الأسئلة. نعتبر الأحداث التالية:

- A " الأسئلة 3 كلها في الهندسة "
- B " سؤال واحد فقط في كل مادة "
- C " سؤال على الأقل في الهندسة "

(I) أ - ما هو عدد السحبات الممكنة لهذا الطالب إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .

درس : حساب الاحتمال

- ب- أحسب احتمالات الأحداث : **A** و **B** و **C** إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .
- (2) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .
- (3) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع وإحلال للأسئلة .

جواب : لبعض الأسئلة

(1)

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة في آن واحد من بين 12 سؤال يمثل تأليفة ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد التأليفات ل 3 من بين 12 ومنه : $\text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$

ب - احتمال الأحداث:

• احتمال **A** :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد التأليفات ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = C_5^3 = 10$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

• احتمال **B** :

نحسب : $\text{card}B$:

سؤال واحد فقط في كل مادة أي سؤال 1 في الهندسة (C_5^1) و سؤال 1 في الجبر (C_4^1) و سؤال 1 في التحليل (C_3^1) ومنه :

$$\text{card}B = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

• احتمال **C** : حاول أنت تعطي الجواب .

(2) السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة بالتتابع وبدون إحلال من بين 12 سؤال يمثل ترتيبية بدون تكرار ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد الترتيبات ل 3 من بين 12 ومنه : $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

• احتمال **A** :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد الترتيبات بدون تكرار ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = A_5^3 = 60$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$

طريق 2 :

السؤال 1 في الهندسة احتمالته هو $\frac{5}{12}$. السؤال 2 في الهندسة احتمالته هو $\frac{4}{11}$. السؤال 3 في الهندسة احتمالته هو $\frac{3}{10}$.

ومنه $p(A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$. (هناك طريقة 3 استعمال الشجرة للإجابة عن هذ الأسئلة :

V. الاحتمال الشرطي - استقلال حدثين - الاختبارات المتكررة :

A. الاحتمال الشرطي :

01. تعريف :

ليكن **A** و **B** حدثين لنفس التجربة Ω حيث : $p(A) \neq 0$.

احتمال الحدث **B** علما أن الحدث **A** محقق هو العدد $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ و الذي نرمز له ب: $p_A(B)$ أو $p\left(\frac{B}{A}\right)$

02. مثال:

يحتوي صندوق: على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء.
سحبنا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من هذا الصندوق .

احسب احتمال الأحداث التالية:

" B_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

" R_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

" C " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء علما أن

الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

" D " الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء علما أن

الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

" E " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء و الكرة الثانية حمراء "

" R_2 " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء "

جواب:

حسب شجرة الأحداث ، لدينا:

$$p(R_1) = \frac{6}{10} \text{ و } p(B_1) = \frac{4}{10}$$

$$p(C) = p_{B_1}(R_2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$p(D) = p_{R_1}(B_2) = \frac{4}{9}$$

$$p(E) = p(B_1 \cap R_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9}$$

$$p(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$$

طريقة ثانية لتوضيح الجواب الأول فقط:

نحسب: $p(B_1)$:

الكرة الأولى بيضاء احتمالها هو: $\frac{4}{10}$. الكرة الثانية غير مهم لونها (كيف ما كان لونها) احتمالها هو $\frac{6}{9}$

$$\text{ومنه: } p(B_1) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

03. صيغ الاحتمالات المركبة:

1. خاصية:

ليكن $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منتهي. A و B حدثان لنفس التجربة Ω حيث: $p(A) \neq 0$ و $p(B) \neq 0$.

الكتابة: $p(A \cap B) = p(A)p_B(B) = p(B)p_A(A)$ تسمى صيغة الاحتمالات المركبة.

04. الاحتمالات الكلية:

1. خاصية:

ليكن $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منتهي. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ أحداث من Ω تكون تجزيئي ل Ω

(أي $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ و $\forall i, j / i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$) . احتمال حدث B من Ω هو:

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + p(A_3)p_{A_3}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B)$$

05. مثال :

B. استقلالية حدثين:

01. تعريف :

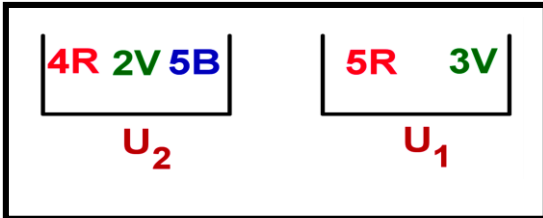
نقول بأن حدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ أو أيضا: $p_A(B) = p(B)$

02. ملحوظة : A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيق أحدهما لا يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الآخر .

03. أمثلة:

مثال 1 :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.



نسحب كرة من الصندوق U_1 وكرة من الصندوق U_2 .

التجربة متكونة من اختبارين مستقلين

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 " $A_{R_1;V_2}$

نعتبر الأحداث التالية :

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 " R_1

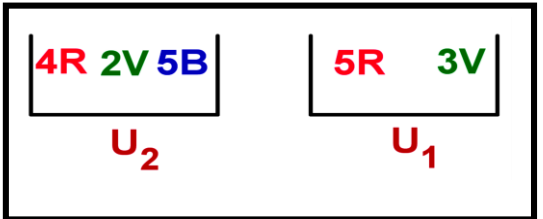
$$p(R_1) = \frac{5}{8}$$

" سحب كرة خضراء من الصندوق U_2 " V_2

$$p(V_2) = \frac{2}{11}$$

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 " $A_{R_1;V_2}$

الحدثين R_1 و V_2 مستقلين. (لأن سحب كرة من أحد الصندوقين احتمالها غير مرتبط بنتائج الاختبار لصندوق الآخر.



$$p(A_{R_1;V_2}) = p(R_1) \times p(V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{11} = \frac{5}{44}$$

مثال 2 :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ثم نسحب منه بندق واحدة .

لنعتبر الحدث V " الحصول على بندق أخضر "

1. أنشئ شجرة الإمكانات و الاحتمالات للتجربة .

2. أحسب : $p(V)$.

3. ما هو احتمال :

B " اختيار الصندوق U_1 علمنا اننا حصلنا على بندق أخضر "

جواب :

1. ننشئ شجرة : (أنظر الشكل أمامه)

2. نحسب : $p(A)$.

V " سحب بندق أخضر "

U_1 " اختيار الصندوق U_1 "

U_2 " اختيار الصندوق U_2 "

V " البندق المسحوب لونه أخضر " أو أيضا " اختيار الصندوق U_1 و السحب يعطي بندق أخضر أو اختيار الصندوق U_2 و السحب يعطي

بندق أخضر "

ومنه : نعبر عن V بما يلي : $V = (U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)$ إذن :

$$\begin{aligned} p(V) &= P((U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)) \\ &= p(U_1 \cap V) + p(U_2 \cap V) \\ &= p(U_1)p_{U_1}(V) + p(U_2)p_{U_2}(V) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11} \\ &= \frac{49}{176} \end{aligned}$$

خلاصة : $p(V) = \frac{49}{176}$

3. حساب : $p(B)$

$$p(B) = p_V(U_2) = p(U_2 / V) = \frac{p(U_2 \cap V)}{p(V)} = \frac{p(U_2) \times p_{U_2}(V)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{11}}{\frac{49}{176}} = \frac{16}{49}$$

C. الاختبارات المتكررة:

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب عشوائيا و تانيا كرتين من الصندوق .

ما هو احتمال الحدث " A " الحصول على رقمين زوجيين؟"

نعيد سحب عشوائي و تانيا كرتين من الصندوق ثلاث مرات متتابة و نهتم كم من مرة تحقق الحدث A بعد إعادة اختبار 3 مرات متتابة وما هو احتمالها .

جواب:

نحسب : $p = p(A)$

▪ نحسب $\text{card}\Omega$ (عدد سحبات الممكنة)

سحب تانيا كرتين من بين 6 كرات تحمل هو تاليفة ل 2 من بين 6 إذن عدد السحبات الممكنة هو : $\text{card}\Omega = C_6^2 = 15$

▪ نحسب : $\text{card}A$

سحب تانيا كرتين من بين 3 كرات تحمل الأرقام زوجية هو تاليفة ل 2 من بين 3 إذن : $\text{card}A = C_3^2 = 3$

▪ احتمال A :

$$p = p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

02. مفردات :

نقول إن الاختبار تكرر 3 مرات . أما الحدث A تحقق k مرة مع $k \in \{0,1,2,3\}$

03. خاصية:

احتمال تحقق k مرة بالضبط الحدث A بعد تكرار الاختبار n مرة متتالية وفي نفس الظروف هو: $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

مع $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ و $p = p(A)$

04. مثال :

نأخذ المثال السابق:

نحسب $p_{k=2}(A)$ الحدث A تحقق مرتين بعد إعادة الإختبار 3 مرات متتالية: لدينا حسب الخاصية:

$$p_{k=2}(A) = C_3^2 \times [p(A)]^2 \times [1-p(A)]^{3-1} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)$$

VI. المتغير العشوائي - قانون احتمالي :

A. متغير عشوائي

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق .

حدد عدد المرات التي نحصل فيها على رقم فردي بعد كل سحبة ؟

جواب : عدد المرات التي نحصل على عدد فردي هي 0 أو 1 أو 2 .

02. مفردات:

العلاقة التي تربط كل عنصر ω_i (أي كل حدث أولي) من Ω بعدد الأرقام الفردية التي أعطتها السحبة ω_i تسمى متغير عشوائي و نرمز له ب : X أو Y أو Z ...
وهذه العلاقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = x_i$$

- الأعداد : 0 ، 1 ، 2 : تسمى قيم المتغير العشوائي X و نرمز لها ب : $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = 2$ (بصفة عامة x_i) وهي تكون مجموعة نرمز لها ب : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$
- بصفة عامة $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
- جميع الأحداث الأولية ω حيث $X(\omega) = x_i$ تكون مجموعة ضمن Ω إذن هي حدث و نرمز لهذا الحدث ب : $(X = x_i)$.
- إذن : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$
- الكتابة : $p(X = x_i)$ تعني : احتمال الحصول على الحدث $(X = x_i)$.

B. قانون احتمال عشوائي:**01. نشاط:** نأخذ النشاط السابق: لنعتبر الأحداث التالية:A " ليس هناك رقم فردي " . نرمز له ب : $X = 0$ ومنه : احتمال الحدث A هو : $p(A) = p(X = 0)$ B " نحصل فقط على رقم واحد يكون فردي " . نرمز له ب : $X = 1$ ومنه احتمال الحدث B هو : $p(B) = p(X = 1)$ C " نحصل فقط على رقمين فرديين " . نرمز له ب : $X = 2$.ومنه احتمال الحدث C هو : $p(C) = p(X = 2)$ **02. مفردات:**

حساب جميع الاحتمالات : $p(X = x_i)$ لكل x_i من $X(\Omega)$ يسمى قانون احتمال للمتغير العشوائي X .
نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في جدول.

03. مثال: نأخذ النشاط السابق:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$	$p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$

VII. الأمل الرياضي - المغايرة - الانحراف الطرازي:

01. تعاريف:

ليكن $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X . و $p_i = p(X=x_i)$ احتمالات قيم المتغير العشوائي X .

1. العدد: $\sum_{i=1}^{i=n} p(X=x_i) = x_1 \times p(X=x_1) + x_2 \times p(X=x_2) + \dots + x_n \times p(X=x_n)$. يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ويرمز له ب: $E(X)$ أو أيضا ب: \bar{X} .

2. العدد: $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{X}) \times p(X=x_i)$

$$= (x_1)^2 \times p(X=x_1) + (x_2)^2 \times p(X=x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X=x_n) - [E(X)]^2$$

3. يسمى المغايرة للمتغير العشوائي X . (ملحوظة: $V(X) \geq 0$ (عدد موجب))

4. العدد: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .

5. لكل $x \in \mathbb{R}$ نرسم للحدث $\{ \omega \in \Omega / X(\omega) < x \}$ ب: $(X < x)$

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

6. الدالة F : المعرفة ب: $x \rightarrow F(x) = p(X < x)$ حيث:

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}[$: $p(X < x) = p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_i)$ تسمى دالة التجزيى للمتغير العشوائي X .

$x \in$	$] -\infty, x_1]$	$] x_1, x_2]$	$] x_2, x_3]$...	$] x_{n-1}, x_n]$	$] x_n, +\infty [$
$F(x) =$	0	$p(X=x_1)$	$p(X=x_1) + p(X=x_2)$...	$p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_{n-1})$	1

02. ملحوظة: دالة التجزيى خارج المقرر

03. مثال:

نأخذ المثال السابق:

1. أعط: قانون احتمال.

2. الأمل الرياضي.

3. المغايرة.

4. الانحراف الطرازي.

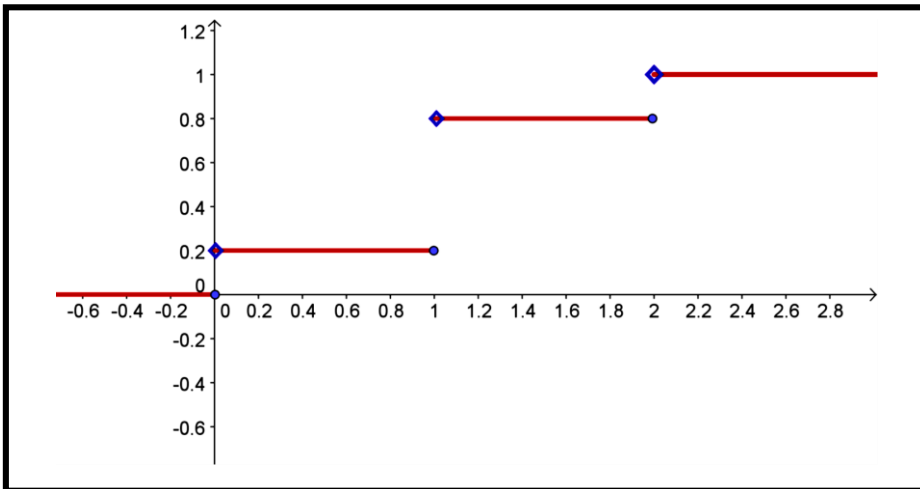
جواب: لنعتبر الجدول الآتي:

قيم المتغير العشوائي	X_i	0	1	2	المجموع
قانون احتمال X	$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$	$p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	1
الأمل الرياضي $E(X)$	$x_i \times p(X=x_i)$	$0 \times \frac{1}{5}$	$1 \times \frac{3}{5}$	$2 \times \frac{1}{5}$	$E(X) = \frac{0+3+2}{5} = 1$
لحساب المغايرة $V(X)$	$x_i^2 \times p(X=x_i)$	$0^2 \times \frac{1}{5}$	$1^2 \times \frac{3}{5}$	$2^2 \times \frac{1}{5}$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 \times p(X=x_i) = \frac{0+3+4}{5} = \frac{7}{5}$

حسب الجدول :

* الأمل الرياضي هو $E(X) = 1$ * المغايرة هي: $V(X) = \frac{7}{5} - (E(X))^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}$ * الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

3. التمثيل المباني لدالة التجزي



.VIII التوزيع الحداني أو المتغير الحداني :

.01 تعريف و خاصيات :

ليكن p هو احتمال الحدث A خلال تجربة واحدة. نعيد التجريبية n مرة (في نفس الظروف) . ليكن X المتغير العشوائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الحدث A بعد n تجربة . لدينا :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\forall k \in X(\Omega) : p(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

المتغير العشوائي X يسمى قانون حداني واسطيه n و p .

$$E(X) = np$$

$$V(X) = n \times p \times (1-p)$$